1. Опр. измеримой ф-ции:
$f(x)$ измерима, если $\forall c: \{x : f(x) < c\}$ измеримо

2. Альтернатива Фредгольма
Либо однород. ур-е $(A-\lambda E)x = \bar{0}$ имеет тривиал. решение
$\Rightarrow (A-\lambda E)x = y$ разрешимо $\forall y \in l_2$;
Либо $(A-\lambda E)x = 0$ имеет нетривиал. решение
$\Rightarrow (A-\lambda E)x = y$ разрешимо $\Leftrightarrow y \perp \ker(A^* - \bar{\lambda}E)$

3. Кольца:
X – пр-во
1) Мн-во k подмн-в X наз-ся кольцом, если:
$A \cap B \in k, \ \forall A, B \in k$
$A \Delta B \in k, \ \forall A, B \in k$
2) кольцо k наз-ся алгеброй, если $X \in k$
3) кольцо k наз-ся σ-кольцом, если $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in k$, $\forall A_n \in k$
4) Кольцо k наз-ся δ-кольцом, если $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in k$, $\forall A_n \in k$
(аналог. (3) и (4) – для алгебры)
5) Минимальным кольцом $k(S)$ наз-ся кольцо $k(S)$, которое содержится в k ($k(S) \subset k$) $\forall k \subset S$
Теор: $\forall S \subset X \ \exists!$ мин. кольцо $k(S)$.
6) Мн-во подмножеств X, S, наз-ся полукольцом, если
$A \cap B \in S, \ \forall A, B \in S$
$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \ \forall A, B \in S; \ B \subset A; \ A_i \in S; \ A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \neq j$
Теор: Пусть S – полукольцо, $k(S)$ – миним. кольцо, порождённое S. Тогда $\forall A \in k(S): \exists B_i \in S \ \ A = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$

4. Мера.
1) Мерой $\mu(A)$ на полукольце S наз-ся отображение $S \to R$:
$\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in S$
если $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, то $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, $A, A_i \in S$
2) Мера $\mu(A)$, заданная на S, наз-ся σ-аддитивной, если
$\forall A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$; $A, A_i \in S$
3) Лемма: Если $B \subset A$; $A, B \in S$ – полукольцо, то $\mu(A) \geq \mu(B)$
4) Мера $\mu(A)$, задан на кольце k, наз-ся непрерывной, если: $\forall A_i \in k$, $A_i \subset A_{i+1}$, $i \in N$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in k \Rightarrow$
$\mu(A) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

Теор: Мера $\mu(A)$, заданная на кольце K, непрерывна $\Leftrightarrow$ $\mu(A)$ – σ-аддитивна

5) Пусть мера $\mu(A)$ задана на кольце K, а мера $m(a)$ задана на полукольце S. Тогда мера $\mu(a)$ – продолжение меры $m(A)$, если:

$$S \subset K,$$
$$\mu(A) = m(A) \quad \forall A \in S$$

Теор: Пусть S – полукольцо, $K(S)$ – мин. кольцо, порожд S, $m(B)$ – мера, зад. на S. Тогда $\exists!$ продолжение меры $m(B)$ на $K(S)$, причём если $m(B)$ – σ-аддит. на S, то и продолжение σ-аддит. на K

6) Теор: Пусть мера μ задана на кольце K и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$, причём $A_i, A \in K$, $\forall i$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu(A)$
Если $\mu(A)$ – σ-аддитив. мера на K, и $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A, A_i \in K$ $\forall i$, то $\mu(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

7) Теор. Длина – σ-аддит. мера на полукольце S.
$m_F[a,b) = F(b) - F(a)$ при $F(t) = t$

5. Мера Лебега

K – кольцо с σ-аддит. мерой $m(B)$
$X \in K$, $m(X) < \infty$, K – алгебра элементарных мн-в

1) Верхней мерой $A \subset X$ наз-ся число $\mu^*(A) = \inf \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(B_i)$, где $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in K$.

Лемма: Если $B \in K$, то $\mu^*(B) = m(B)$

2) $A \subset X$ измеримо по Лебегу, если $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$.
Мерой Лебега наз-ся число $\mu(A) = \mu^*(A)$, если A измеримо по Лебегу.

3) Нижней мерой мн-ва A наз-ся число
$\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A)$.

4) Утв: Мн-во A измеримо по Лебегу $\Leftrightarrow$ $\mu^*(A) = \mu_*(A)$

5) Теор: Если $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, то $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$, где $A, A_j \subset X$

Сл. 1: $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ $\forall A \subset X$

Сл. 2: $|\mu_*(A) - \mu^*(C)| \leq \mu^*(A \Delta C)$, $\forall A, C \subset X$

6) Мн-во A – мн-во меры 0, если A измеримо, $\mu^*(A) = 0$

Утв: Если A_i имеет меру 0 $\forall i$, то $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ имеет меру 0: $\mu(A) = 0$

6. Критерий измеримости по Лебегу

Теор.: Мн-во $A \subset X$ измеримо по Лебегу $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in K : \mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$

След.: $A \subset X$ измеримо по Лебегу, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C$ - измерим.: $\mu^*(A \triangle C) < \varepsilon$

7. Алгебра измеримых по Лебегу мн-в

1) Если A_1, A_2 измеримы по Лебегу, то $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \setminus A_2$, $A_1 \triangle A_2$ измеримы по Лебегу, т.е. измеримые по Лебегу мн-ва образуют алгебру

2) Если A_1, A_2 измеримы по Лебегу, $A_1 A_2 = \varnothing$, то $\mu^*(A_1 \sqcup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$

Сл. 1: $\mu^*(A)$ - мера на алгебре измеримых по Лебегу мн-в.

Сл. 2: Если $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, A, A_i - измер. по Лебегу, то $\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

3) Если A_i измер. по Лебегу, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ измеримо по Лебегу

Сл. 1: Измерим. по Лебегу мн-ва образуют σ-алгебру

Сл. 2: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ - изм. по Лебегу, если A_i - изм.

8. Мера Жордана

1) $\mu_J^*(A)$ - верхняя мера Жордана, если $\mu_J^*(A) = \inf \sum_{i=1}^{n} m(B_i)$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $B_i \in K$

2) Теор.: Если A измер. по Жордану, то A измерима по Лебегу и $\mu_L(A) = \mu_J(A)$

3) Пусть $X : m(X) = \infty$. Мера $\mu(A)$ наз-ся σ-конечной, если $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$, X_k - эл. мн-во, $m(X_k) < \infty$, $\forall k \in N$

4) Мн-во $A \subset X$ наз-ся измеримым, если $A \cap X_k$ изм. $\forall k \in N$ и мерой $\mu(A)$ наз-ся число $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A X_k)$, причём $\mu(A) \leq +\infty$

5) Мера $\mu(A)$ наз-ся полной, если $\mu(A) = 0 \Rightarrow$ $\forall E \subset A$ измеримо, $\mu(E) = 0$

Утв.: Мера Лебега - полная мера

9. Мера Лебега на прямой

1) Утв.: Пусть $G \subset (-\infty, +\infty)$, G - открытое мн-во, тогда $\exists! \ (a_k, b_k) : G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$

2) Утв: $\forall$ открытое мн-во $G \subset R^n$ – измеримо по Лебегу

3) канторово мн-во: $k = [0,1] \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$, $\Delta_k = (a_k, b_k)$,
замкнутое, измеримо по Лебегу.
Утв: k имеет мощность континуум.

4) Пусть A измеримо по Лебегу. Тогда $\exists C$ – борелевское: $C \supset A$, $\mu_B(C) = \mu_L(C) = \mu_L(A)$.

5) $\exists$ неизмеримые по Лебегу мн-ва.

10. Мера Лебега – Стилтьеса на прямой.

1) Ф-ия $F(t)$ – неубывающая $\Rightarrow$ длина $m_F[a,b) = F(b) - F(a)$ на S – мера Лебега – Стилтьеса.

2) Теор: Мера $m_F(A)$, зад. на полукольце S, σ-аддит. $\Leftrightarrow$ $F(t)$ – непр. слева в кажд. точке

Утв: $\forall B$ – борелевское мн-во, измерим отн. μ_F, $\forall F$ – неубыв. непр. слева

3) Пусть меры $\mu(A)$ и $\nu(A)$ – σ-аддит., определ. на одной σ-алгебре. Тогда мера $\nu(A)$ наз-ся абсолютно непрерыв. относит. $\mu(A)$, если $\forall A$: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

Лемма: Пусть $\mu(A)$, $\nu(A)$ зад на общей алгебре и σ-аддит. $\nu(A)$ – абс. непр. отн. $\mu(A)$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$

4) Ф-ия $F(t)$ наз-ся абс. непрерывной, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:
$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, $(a_k, b_k) \cap (a_j, b_j) = \varnothing$, $k \neq j$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$

Утв: Если $F(t)$ абс. непр., то $F(t)$ непр.

5) Теор: Пусть мера $\mu(A)$ порожд. длиной ($F(t) = t$), мера $\nu(A)$ порожд. $F(t)$, $F(t)$ – неуб., непр. слева. Тогда $\nu(A)$ абс. непр. отн. $\mu(A) \Leftrightarrow F(t)$ – абс. непр. ф-ия.

6) Пусть μ, ν – σ-аддит. меры на общей σ-алгебре Σ. Эти меры наз-ся взаимно сингулярными, если $\exists A \in \Sigma$: $\mu(A) = 0$, $\nu(X \setminus A) = 0$

7) Если μ порожд. длиной, μ и ν – взаимно сингул., то ν – сингулярная мера

11. Измеримые ф-ии

X - мн-во, Σ - σ-алгебра измер. по Лебегу мн-в, $\mu(A)$ - σ-аддит., полная, σ-конечная мера.

1) Ф-ия $f(x)$, зад. на X, наз-ся измеримой, если измеримо мн-во $\{x \in X : f(x) < c\}$ $\forall c \in R$

2) Утв: Непр. ф-ия $f(x)$ всегда измерима $\forall \mu$

12. Св-ва измеримых ф-ий

1) Следующие утвержд. эквивалентны: $\{f(x) < c\}$ $\forall c$ - измер., $\{f(x) > c\}$ $\forall c$ - измер., $\{f(x) \le c\}$ $\forall c$ - измер., $\{f(x) \ge c\}$ $\forall c$ - измеримо.

2) Если ф-ия $f(x)$ измерима, то $f(x) + M$ тоже измер. $\forall M \in R$

3) Если $f(x)$ и $g(x)$ - измеримы, то $\{f(x) < g(x)\}$ - измер. мн-во

4) Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы, то $f(x) \pm g(x)$ измерима

5) Если $f(x)$ измер., то $|f(x)|$ измер., $f^2(x)$ измерима

6) Если $f(x)$ и $g(x)$ измер., то $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, где $g(x) \neq 0$ измеримы

7) Если $f_n(x)$ измер., $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in X$, то $f(x)$ - измер.

8) Ф-ии f и g почти всюду совпадают на X, если $\mu\{f \neq g\} = 0$. Также их наз-ют эквивалентными

Утв: Если f измер. на X, $f \overset{п.в.}{=} g$ на X, то g измер. на X

Теор: Если $f_n \xrightarrow[X]{п.в.} f$, f_n - измерима, то f - измерима

9) Если f и g измеримы, $g(x) \neq 0$ на $X \setminus E$, $\mu(E) = 0$, то f/g измерима на X

10) Если $f(x)$ - измеримая и имеет произв. почти всюду на X, то $f'(x)$ измерима.

13. Сх-ть по мере

1) Посл-ть измеримых ф-ий $f_n(x)$ сх-ся по мере к измерим. ф-ии $f(x)$, если $\mu\{|f_n - f| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall \varepsilon > 0$

2) Лемма: Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $f_n \xrightarrow{\mu} \tilde{f}$ на E, то $f \overset{п.в}{=} \tilde{f}$ на E

3) Теор.: Если $f_n \xrightarrow[E]{п.в} f$, f_n – измер., то $f_n \xrightarrow[E]{\mu} f$

Теор. Егорова: Пусть $\mu(X) < \infty$; f_n, f – измеримы, $f_n \xrightarrow[X]{п.в} f$.
Тогда $\forall \delta > 0 \ \exists X_\delta \subset X : \mu(X \setminus X_\delta) < \delta$, $f_n \underset{X_\delta}{\rightrightarrows} f$

Лемма: Если посл-ть простых ф-ий $\{f_n(x)\}$ сх-ся равн. на X, $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то $\int_X f_n(x)\,d\mu \to I$, где $I = \int_X f(x)\,d\mu$ – интеграл Лебега

4) Утв: Если $f(x)$ огр. и измер. на X, то $\exists$ посл-ть простых ф-ий $f_n(x)$: $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$.

След.: Любая огр. изм. ф-ия интегрир. по Лебегу

14. Интеграл Лебега

1) Интеграл Лебега: $\int_X f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \mu(A_k)$, $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k = X$, $f_k \in R$ – измеримы.
$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k}(x)$

2) Простая ф-ия $f(x)$ наз-ся интегрируемой по Лебегу, если $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \mu(A_k) < \infty$ (простая ф-ия – измерима и приним. счёт. число зн.)

3) Св-ва интеграла Лебега:

1°. Если $f(x)$ – простая, интегрир., то $\exists \int_X c \cdot f\,d\mu = c \int_X f\,d\mu$

2°. Если f, g – простые, интегрир., то $\exists \int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$

3°. $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \sup_X |f(x)| \mu(X)$

4°. f – изм., g – интегр., $|f| \le g$ на $X \Rightarrow f$ – интегрир. на X

4) $f(x)$ – интегрир. по Лебегу, если $\exists f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, f_n – простые, интегрир.; $\int_X f\,d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n\,d\mu$.

5) Утв: $\forall f \ \exists \{f_n\}$ – простые: $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$

Сл.1: Если f – инт., то $|f|$ – инт., $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu$

Сл.2: Если f – инт., g – изм., $|g| \underset{X}{\le} M$, то $f \cdot g$ – интегр.

6) Св-ва (продолж.):

5°. (аддитивность): $A \subset X$, A – измер. $\Rightarrow$
$\int_A f\,d\mu = \int_X f \chi_A(x)\,d\mu$, где f – инт. на X

След.: Если $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \Sigma \Rightarrow \int_{\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k} f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f\,d\mu$, $\forall$ инт. f

6°. $E \in \Sigma$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow \forall f$ инт. на E: $\int\limits_E f d\mu = 0$

7°. Если $f \overset{\text{п.в}}{=} 0$, то $\int\limits_X f d\mu = 0$

8°. Если f - интегрир., $\int\limits_X |f| d\mu = 0$, то $f \overset{\text{п.в}}{=} 0$

9°. $\int\limits_{\bigsqcup_{k=1}^n A_k} f d\mu = \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{A_k} f d\mu$.

15. Предельный переход под знаком интеграла

Если посл-ть интегрир. по Лебегу ф-ций $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то $f(x)$ - интегрир. по Лебегу и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu = \int\limits_X f d\mu$

16. Абсол. непр-ть меры Лебега

f интегрир. на $X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \mu(A) < \delta$, $A \in \Sigma$
$\Rightarrow \left|\int\limits_A f d\mu\right| < \varepsilon$

Сл. (σ-аддит. меры Лебега):
$X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \Sigma$, f - инт. на $X \Rightarrow \int\limits_X f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$.

Теор: $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \Sigma$, f - инт. на $A_k\ \forall k$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f| d\mu < \infty$.
Тогда f - интегр. на X

17. Теорема Лебега:

Пусть f_n - интегр., $\{f_n\} \xrightarrow[X]{\mu} f$, f - измер., $\exists F(x)$ - инт. на X: $|f_n(x)| \le F(x)$ п.в. на X $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда f - инт. на X, $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

След: f_n - инт. на X, $|f_n| \le F(x)$ п.в. на X, $\forall n \ge 1$,
$f_n \xrightarrow[X]{\mu} f \Rightarrow f$ - инт., $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$

18. Теорема Леви:

Пусть посл-ть $f_n(x)$ - инт. на X, $\exists c > 0$: $\int\limits_X f_n d\mu \le c$,
$f_n \le f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, п.в. на X, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
Тогда $f(x)$ - интегр., $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$

След: $\varphi_k(x) \ge 0$, $k \ge 1$ п.в. на X, $\varphi(x)$ - инт. на X,
$\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_X \varphi_k(x) d\mu \le c$ $\forall m$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$ - инт. ф-ия и
$\int\limits_X \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_X \varphi_k(x) d\mu$

19. Теорема Фату:

Пусть $f_k(x) \ge 0$ $\forall k$ п.в. на X, $f_k(x)$ - интегр.: $\int\limits_X f_k d\mu \le c$ $\forall k$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_k(x) \overset{\text{п.в}}{=} f(x)$. Тогда $f(x)$ - инт., $\int\limits_X f(x) d\mu \le c$

20. Интеграл Римана:

1) Пусть $f(x) \in R[a,b]$, тогда $f(x)$ инт. по Лебегу на $[a,b]$ и $R\int_a^b f(x)\,dx = L\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu$

2) Критерий инт-ти по Риману:
Пусть $f(x)$ огр. на $[a,b]$. Тогда $f(x) \in R[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ п.в. непрерывна, т.е
$\exists$ мн-во $E \subset [a,b]$, $\mu(E) = 0$: $\forall x \in [a,b] \setminus E$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|x - y| < \delta$, $y \in [a,b]$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

21. Пространство $L_1(0,1)$:

Пусть $f(x)$ - инт. по Лебегу на $[0,1]$, μ - σ-аддит. мера, полная, $X = [0,1]$

1) Норма: $\|f\|_{L_1} = \int_0^1 |f(x)|\,d\mu$

2) Аксиомы нормы:
1°. $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \overset{\text{п.в.}}{=} 0$
2°. $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$
3° $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

3) Полнота L_1:
Пусть $\{f_n\}$ - фундам. послед. интегрир. по Лебегу ф-ий, $\|f_n - f_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Тогда $\exists f(x)$ - инт. по Лебегу на $[0,1]$: $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

4) Теор: Если $f \in L_1(0,1)$, μ - порожд. длиной, то $\forall \varepsilon > 0$: $\exists \delta$: $|h| < \delta$:
$\int_0^1 |f(x+h) - f(x)|\,d\mu < \varepsilon$, $f = 0$ вне $[0,1]$

22. Пространство $L_p(\mathcal{D})$

$\mathcal{D} \neq R^n$, μ - σ-аддит., σ-конечная, полная

1) Норма: $\|f\|_{L_p(\mathcal{D})} = \left(\int_{\mathcal{D}} |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$

2) Нер-во Юнга: $a, b \geq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$ $\Rightarrow$ $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

3) Нер-во Гёльдера: $f \in L_p(\mathcal{D})$, $g \in L_q(\mathcal{D})$ $\Rightarrow$ f, g - интегр.,
$\left|\int_{\mathcal{D}} fg\,d\mu\right| \leq \|f_{L_p}\| \cdot \|g_{L_q}\|$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

4) Нер-во Минковского: $|f+g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$ $\Rightarrow$ $|f+g|^p$ - инт.

5) Полнота L_p: Пр-во $L_p(\mathcal{D})$ полное, т.е $\forall$ ф-ая послед. сх-ся

6) Утв: $f \in L_p \Rightarrow \exists \tilde{f}$ – простая: $\|f - \tilde{f}\|_{L_p} < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

Утв: $\forall f \in L_p$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tilde{f}$ – огр. с конеч. числом значений: $\|f - \tilde{f}\|_{L_p} < \varepsilon$

7) Теор: Пусть $\mu(A)$ порожд. объёмом, $\mu(\mathcal{D}) < \infty$. Тогда $\forall f \in L_p(\mathcal{D})$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi \in C(\overline{\mathcal{D}})$: $\|f - \varphi\|_{L_p(\overline{\mathcal{D}})} < \varepsilon$

8) Теор.: $f \in L_p(\mathcal{D}) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|h| < \delta$: $\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p} < \varepsilon$

23. Пространство l_p

$x = (x_1, \dots, x_p, \dots)$, полное пр-во

1) Норма: $\|x\|_{l_p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, $p \geq 1$

2) Нер-во Гёльдера: $\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \|x\|_{l_p} \cdot \|y\|_{l_q}$, $x \in l_p$, $y \in l_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$

24. Заряды

1) зарядом наз-ся ф-ия от мн-ва, заданная на σ-алгебре $q(A)$ и $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $q(A) = \sum_{k=1}^{\infty} q(A_k)$

2) Мн-во A наз-ся положительным (отрицательным) отн. заряда $q(A)$, если $q(B) \geq 0$ $(q(B) < 0)$, $\forall B \subset A, B \in \Sigma$

3) Теор. Жордана: $\exists X^+$ – положит. отн. заряда $q(A)$, X^- – отрицат. отн. $q(A)$: $X = X^+ \sqcup X^-$.

Сл.: $\forall q(A)$ $\exists \mu(A), \nu(A)$ – меры: $q(A) = \mu(A) - \nu(A)$, $\forall A \in \Sigma$

25. Ф-ия огранич. вариации

1) Ф-ия $f(x)$ наз-ся ф-ей огр. вар., если $\sup_T \sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \infty$; $T: [a, b) \supset [x_0, x_1) \sqcup [x_1, x_2) \sqcup \dots \sqcup [x_n, x_{n+1})$

$x_0 = a$, $x_{n+1} = b$. Обозн.: $\bigvee_a^b f(x)$

2) Утв. Если $f(x)$ – непр. слева и имеет конечн. вариацию, то $f(x) = F(x) - \Phi(x)$, где $F(x), \Phi(x)$ – неуб., непр. сл.

26. Теорема Радона – Никодима

1) Если заряд $q(A)$ абс. непрер. отн. меры $\mu(A)$, то $\exists f$ – инт.: $q(A) = \int_A f d\mu$, $\forall A \in \Sigma$

2) $\nu(A) = \int_A f d\mu \Rightarrow f = \frac{d\nu}{d\mu}$ – произв. Р-Н

27. Теорема Фубини

X с мерой μ, Y с мерой ν,
$Z = X \times Y$

Пусть $f(x,y)$ инт. по мере $\mu_Z = \mu_X \otimes \mu_Y$ на $Z = X \times Y$.
Тогда 1) $\forall$ п.в. $x \in X$ $f(x,y)$ $\exists$ инт. по μ_Y,
$I(x) = \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y$ $\forall$ п.в. X
$I(x)$ инт. по μ_X, $\int_X I(x)\, d\mu_X = \int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu_X \otimes \mu_Y)$,
$\forall$ п.в. $y \in X$ $f(x,y)$ инт. по μ_X,
$\widetilde{I}(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu_X$ – инт. по μ_Y
$\int_Y \widetilde{I}(y)\, d\mu_Y = \int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu_X \otimes \mu_Y)$

2) Если $f(x,y) \geq 0$, $\exists \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X$, то $f(x,y)$ инт. по $\mu_X \otimes \mu_Y$.

След.: Если $f(x,y)$ инт. по $\mu_X \otimes \mu_Y$, то повтор. инт. равны: $\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu_X \right) d\mu_Y$

28. Метрические пространства

1) Мн-во элем. M наз-ся метрическим пр-вом, если $\forall x, y \in M$ $\exists d(x,y)$:
$d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$
$d(x,y) = d(y,x)$
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x, y, z \in M$

2) Открытый шар: $B(x,r) = \{ y \in M : d(x,y) < r \}$.

3) Точка $x \in G \subset M$ наз-ся внутренней, если $\exists B(x,r) \subset G$

4) Мн-во $G \subset M$ наз-ся открытым, если $\forall x \in G$ явл. внутренней.

5) Точка $x \in M$ наз-ся предельной для $F \subset M$, если $(B(x,r) \setminus x) \cap F \neq \varnothing$ $\forall r > 0$. Мн-во всех предел. точек для $F = F'$

6) Мн-во наз-ся замкнутым, если $F' \subset F$

7) Замыканием $\overline{F}$ мн-ва F наз-ся $\overline{F} = F \cup F'$

8) Утв: Если G – открытое, то $M \setminus G$ – замкнутое. Если F – замкн., то $M \setminus F$ – открытое.

Утв: Если G_α – открытое, то $\bigcup_\alpha G_\alpha$ – открытое

9) Утв: Если $d(x,y)$ – метрика, то $\widetilde{d}(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ – тоже метрика

29. Принцип сжимающих отображений

1) Посл-ть элем. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз-ся <u>сходящейся</u> к $x \in M$, если $d(x, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2) Посл-ть назыв <u>фундаментальной</u>, если $d(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ или $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon, \ \forall n \geq N, \ \forall m \in \mathbb{N}$.

3) Пр-во M наз-ся <u>полным</u>, если $\forall$ фундам посл-ть в нём сх-ся

4) Отображение $f: X \to Y$ (X с метрикой d_X, Y с метр. d_Y) <u>непрерывно</u> в т. x, если:
Гейне: $\forall x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$
Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : d(x, z) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(z)) < \varepsilon$

4) Отобр. $f: M \to M$ наз-ся <u>сжимающим</u>, если $d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$, $\forall x, y \in M$, где $\alpha = const$, $\alpha \in (0,1)$

5) <u>Теорема</u> (ПСО): Если M – полное метрич. пр-во, $f: M \to M$, f – сжимающее, то $\exists x \in M : f(x) = x$

<u>Теор</u> (Лок. форма СО): Пусть M – полное, метрич. пр-во, $f: B(x_0, r) \to M$, f – сжим. на $B(x_0, r)$, $d(f(x_0), x_0) \leq (1-\alpha) r$ Тогда $\exists! \ x = f(x)$, $x \in B(x_0, r)$

6) <u>Теор</u>: Пусть M – метр. пр-во. Тогда $\exists!$ с точностью до изометр., полное метр. пр-во $\tilde{M}$:
$M \sim N \subset \tilde{M}$ ($M \sim N$ – изометр.)
$\overline{N} = \tilde{M}$

7) X – <u>стационарный класс</u>, если в него входит фунд. посл-ть $\{x, x, \dots\}$, $x \in M$

30. Теорема Бэра – Хаусдорфа

1) $N \subset M$ наз-ся <u>плотным</u> в M, если $\overline{N} = M$

2) Замкнутое $F \subset M$ наз-ся <u>нигде неплотным</u> в M, если F не содерж. ни одного шара $B(x, r)$

3) Мн-во $E \subset M$ наз-ся <u>нигде неплотным</u> в M, если $\overline{E}$ нигде неплот. в M

4) <u>Утв</u>: Замкн. мн-во F нигде неплотно в M $\Longleftrightarrow$ $M \setminus E$ плотно в M

5) Мн-во $E \subset M$ наз-ся <u>множеством 1ой категории</u>, если $\exists E_k \subset M$ – нигде неплот., $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Иначе E – <u>мн-во 2ой кат.</u>

6) <u>Теор</u>: (о влож. шарах): Пусть $\overline{B(x_n, r_n)}$ содерж. в себе $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})}$ $\forall n \geq 1$; $r_n \to 0$, M – полн. метр. пр-во. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} \neq \varnothing$, где $\overline{B(x,r)} = \{y \in M \mid d(x,y) \leq r\}$

7) <u>Теор</u>: (Б-Х.): Полное метрич. пр-во – множество 2^{ой} категории.

31. <u>Компактность метр. пр-в</u>

1) Метр. р-во M наз-ся <u>компактным</u>, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M$ можно выбрать сх-ся п/посл. $x_{n_k} \to x$, $x \in M$

<u>Утв</u>: Если метр. пр-во компактное, то оно полное.

2) Метр. пр-во M наз-ся <u>предкомпактным</u>, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать фунд. $\{x_{n_k}\}$.

3) Метр. пр-во M наз-ся <u>огранич</u>, если $\sup_M d(x', x'') < \infty$

<u>Утв</u>: Если метр. пр-во предкомп., то оно огранич.

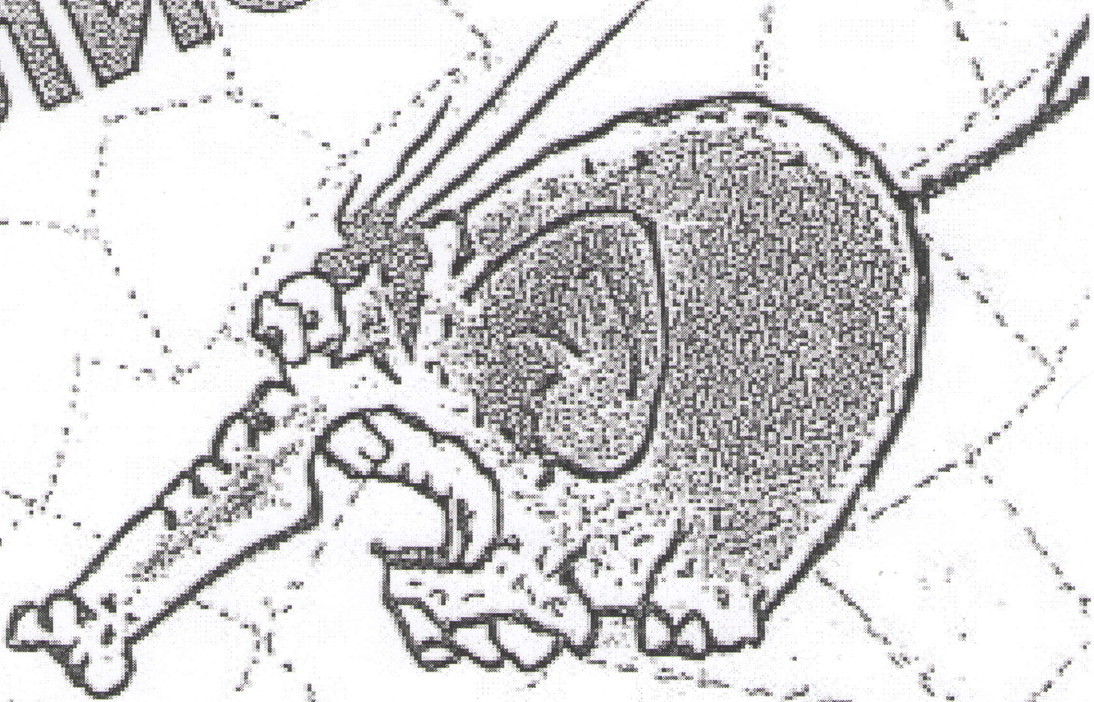
4) M, $N \subset M$, N наз-ся <u>ε-сетью</u> для M, если $M \subset \bigcup_{x \in N} B(x, \varepsilon)$.

5) Метр. пр-во M наз-ся <u>вполне огранич</u>, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечная ε-сеть, т.е. $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_n, \varepsilon)$.

6) <u>Теор</u>: Метр. пр-во M предкомп. $\Leftrightarrow$ M вполне огр.

<u>Сл.</u>: Метр. пр-во M предкомп., если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ предкомп. ε-сеть N.

ЛИСТ ГНЕВА



В СЛУЧАЕ **ПРИПАДКА ЯРОСТИ** СКОМКАТЬ И ШВЫРНУТЬ В УГОЛ

В СЛУЧАЕ СИЛЬНОГО ПРИПАДКА КОМКАТЬ ПО ПУНКТИРУ.